MÔN HỌC:

PHƯƠNG PHÁP SỐ

GV: Th.S Nguyễn Tấn Phúc.
Bộ môn Cơ Điện Tử.
Email: phucnt@hcmuaf.edu.vn.
Tel : 01267102772.
WEBSITE:
http://www2.hcmuaf.edu.vn/?ur=phucnt.

MÔN HỌC:

PHƯƠNG PHÁP SỐ

GV: Th.S Nguyễn Tấn Phúc.

Bộ môn Cơ Điện Tử.

Email: phucnt@hcmuaf.edu.vn.

Tel : 01267102772.

WEBSITE:

http://www2.hcmuaf.edu.vn/?ur=phucnt

CHƯƠNG 2

GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Bài toán : tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 .$$

với f(x) là hàm liên tục trên khoảng đóng [a, b] hay khoảng mở (a,b).

1. Khoảng cách ly nghiệm

Khoảng đóng [a,b] hay mở (a,b) trên đó ***tồn tại duy nhất nghiệm*** của phương trình gọi là khoảng cách ly nghiệm.

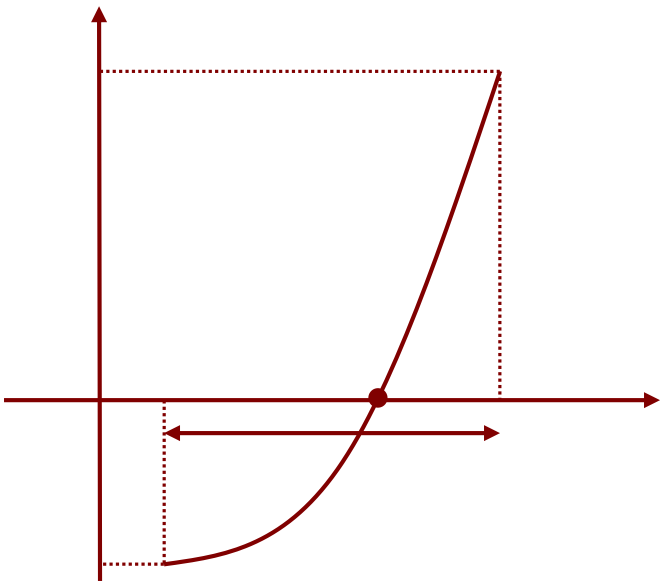
Định lý :

Nếu hàm f liên tục trên đoạn [a,b] thoả điều kiện $f(a) .f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên [a,b].

Nếu hàm f đơn điệu thì nghiệm là duy nhất.

ĐK đủ: [a, b] là KCLN của pt khi

- $f(a)\, f(b) < 0$.
- Đạo hàm f' không đổi dấu trên đoạn [a,b]



Ví dụ :

Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt :

$$f(x) = x^5 + x - 12 = 0$$

Giải :

Ta có $f(1) = -10,\ f(2) = 22$

$$\Rightarrow f(1)\ f(2) < 0$$

Mặt khác

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \quad \forall x$$

f hàm đơn điệu tăng nên pt có duy nhất nghiệm

Vây khoảng cách ly nghiệm là (1,2)

Ví dụ :

Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

giải :

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-1	3	1	-1	3	+

Nhìn vào bảng ta thấy pt có nghiệm trong các khoảng (-2, -1) (0, 1) (1,2)

Vì pt bậc 3 có tối đa 3 nghiệm, nên các khoảng cách ly nghiệm là : (-2,-1) (0,1) (1,2)

Bài tập :

1. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$$

2. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$$

Giải

1. $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

$f'(x) = e^x - 2x + 3$

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-	-	-	+	+	+

Nhận xét : $f'(x) > 0, \forall x \in [0,1]$.

Vây khoảng cách ly nghiêm (0,1)

2. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = \cos x - x\sin x - 4x + 3$

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-	-	+	+	-	-

Nhận xét :

$f'(x) < 0 \ \forall x \in [1,2]$,

$f'(x) > 0 \ \forall x \in [-1,0]$

Vây các khoảng cách ly nghiệm : (-1. 0), (1,2)

2. Cách giải gần đúng pt f(x) = 0

- B1: tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm

- B2: trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình

3. Công thức sai số tổng quát :

Định lý :

Giả sử f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b)
Nếu x* , x là nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác của phương trình và

$$|f'(x)| \geq m > 0, \forall x \in (a,b)$$

thì sai số được đánh giá theo công thức :

$$\boxed{|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m}$$

Ví dụ : Xét phương trình

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$ trên khoảng $[-2, -1]$

Tính sai số nếu chọn nghiệm $x^* = -1.37$

Giải

$f'(x) = 3x^2 - 10x$

Ta có $|f'(x)| = |x|\,|3x-10| = -x(10-3x), \forall x \in [-2,-1]$

Vậy $|f'(x)| \geq 13 = m, \forall x \in [-2,-1]$

Sai số

$|x^* - x| \leq |f(x^*)|/m \approx 0.0034$

Ghi nhớ : sai số luôn làm tròn lên

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = 5x + \sqrt[7]{x} - 24 = 0$$

trên khoảng [4,5]

Tính sai số nếu chọn nghiệm x* = 4.9

Giải

$$f'(x) = 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

=> $$|f'(x)| \geq 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{5^6}} = m, \ \forall x \in [4,5]$$

Sai số

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)|/m \approx 0.3485$$

4. Các phương pháp giải gần đúng

- *Phương pháp chia đôi(Bisection method)*
- *Phương pháp lặp đơn.(Iterative method)*
- *Phương pháp lặp Newton.(Newton method)*

II. Phương Pháp Chia Đôi

Xét phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm chính xác x trong khoảng cách ly nghiệm $[a,b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

1. Đặt $a_o = a$, $b_o = b$

Chọn x_o là điểm giữa của $[a,b]$

Ta có $x_o = (a_0+b_0) / 2$, $d_0=b_o-a_o=b-a$

Nếu $f(x_o) = 0$ thì x_o là nghiệm $\rightarrow$ xong

2. Nếu

- $f(a_o)f(x_o) < 0$: đặt $a_1 = a_o$, $b_1 = x_o$
- $f(x_o)f(b_o) < 0$: đặt $a_1 = x_o$, $b_1 = b_o$

Ta thu được $[a_1, b_1] \subseteq [a_o,b_o]$

$$x_1 = (a_1+b_1) / 2,\ d_1 = b_1-a_1= (b-a)/2$$

3. Tiếp tục quá trình chia đôi như vậy đến n lần ta được

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1},b_{n-1}],\ d_n = b_n-a_n= (b-a)/2^n$$

$$x_n = (a_n+b_n) / 2,\ a_n \le x_n \le b_n,\ a_n \le x \le b_n$$

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

Ta có

$\{a_n\}$ dãy tăng và bị chặn trên (<=b)

$\{b_n\}$ dãy giãm và bì chặn dưới (>=a)

nên chúng hội tụ

Vì $b_n - a_n = (b-a)/2^n$, nên $\lim a_n = \lim b_n$

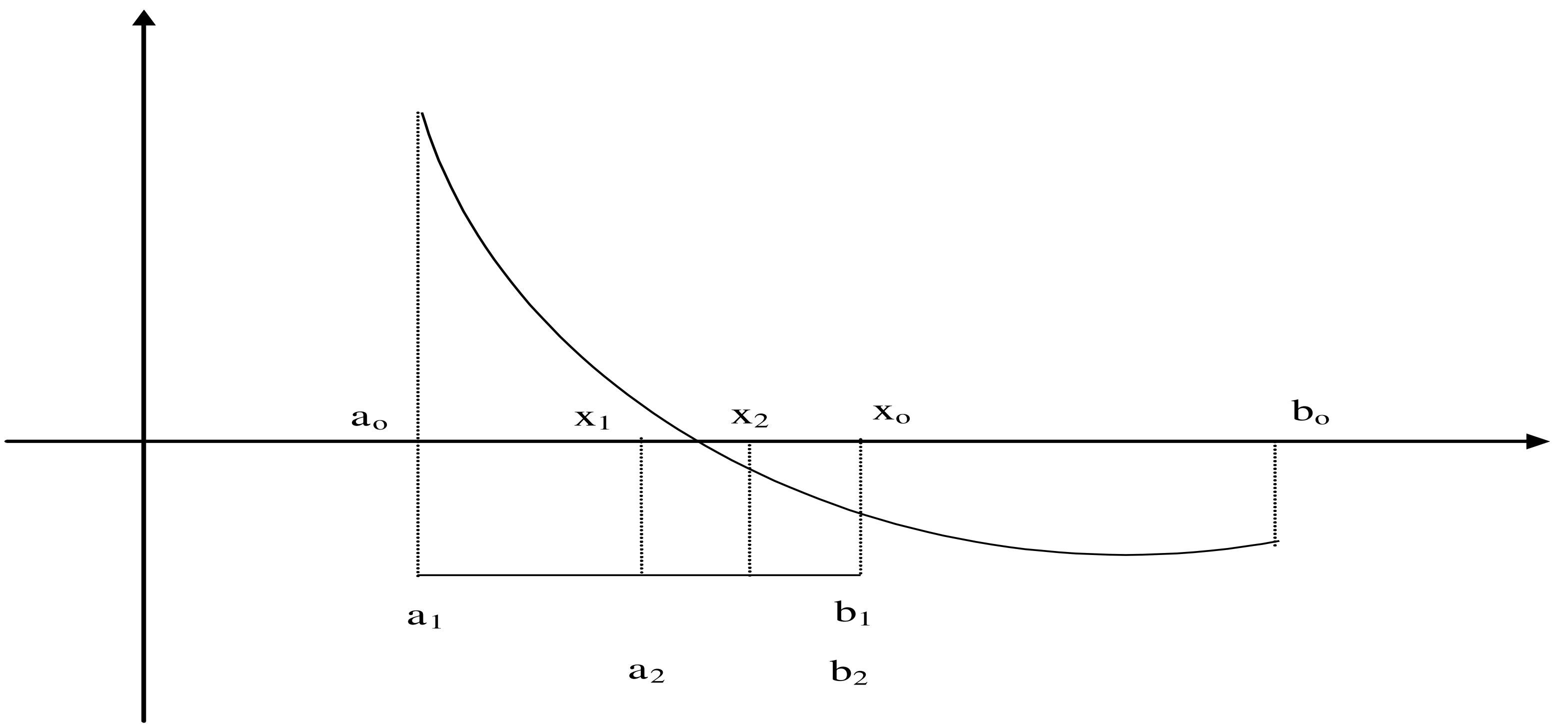
Suy ra $\lim x_n = x$

Vậy x_n là nghiệm gần đúng của pt

Công thức sai số

$$|x_n - x| \le (b-a) / 2^{n+1}$$

Ý nghĩa hình học



Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,1] với sai số 0.1

Giải

Ta lập bảng

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Δ_n
0	0	-	1	+	0.5	+	0.5
1	0	-	0.5	+	0.25	-	0.25
2	0.25	-	0.5	+	0.375	-	0.125
3	0.375	-	0.5	+	0.4375		0.0625

Nghiệm gần đúng là $x = 0.4375$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = 2+\cos(e^x-2)-e^x = 0$$

trên khoảng [0.5,1.5] với sai số 0.04

Giải

Ta lập bảng

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Δ_n
0	0.5	+	1.5	-	1	+	0.5
1	1	+	1.5	-	1.25	-	0.25
2	1	+	1.25	-	1.125	-	0.125
3	1	+	1.125	-	1.0625	-	0.0625
4	1	+	1.0625	-	1.03125		0.03125

Nghiệm gần đúng là $x = 1.03125$

III. Phương Pháp Lặp Đơn

Tham khảo

Xét phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm chính xác x trong khoảng cách ly nghiệm $[a,b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

Ta chuyển pt $f(x) = 0$ về dạng

$$x = g(x)$$

Nghiệm của pt gọi là điểm bất động của hàm $g(x)$

Để tìm nghiệm gần đúng, ta chọn 1 giá trị ban đầu $x_o \in [a,b]$ tùy ý

Xây dựng dãy lặp theo công thức

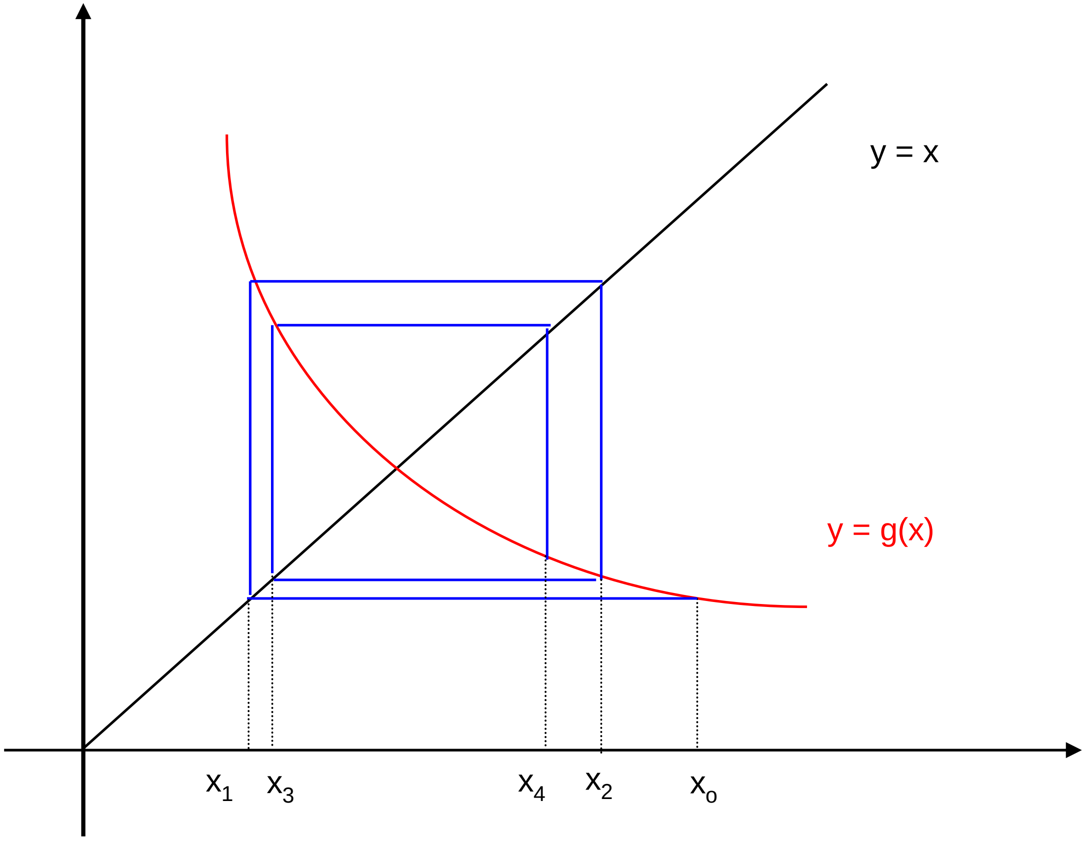
$$x_n = g(x_{n-1}), \forall n = 1, 2, ...$$

Bài toán của ta là khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$

Tổng quát, dãy $\{x_n\}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì nó sẽ hội tụ về nghiệm x của pt

Ý nghĩa hình học



Bây giờ ta tìm điều kiện để dãy $\{x_n\}$ hội tu
Ta có định nghĩa sau

Định Nghĩa : Hàm g(x) gọi là hàm co trên đoạn [a,b] nếu $\exists q : 0<q<1$ sao cho

$$|g(x) - g(y)| \le q\,|x - y|, \forall x, y \in [a,b]$$

q gọi là hệ số co

Để kiểm tra hàm co, ta có định lý sau

Định lý : Nếu hàm g(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và $\exists q : 0<q<1$ sao cho

$$|g'(x)| \le q, \forall x \in [a,b]$$

Thì g(x) là hàm co với hệ số co q

Ví dụ : Xét tính chất co của hàm

$$g(x) = \sqrt[3]{10-x}$$

trên khoảng [0,1]

Giải

Hiển nhiên g(x) khả vi trên [0,1]

Ta có

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(10-x)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{81}} = q, \forall x \in [0,1]$$

$$q \approx 0.0771 < 1$$

Nên g(x) là hàm co

Ví dụ : Xét tính chất co của hàm

$g(x) = \cos x$

trên khoảng [0,1]

Giải

Hiển nhiên g(x) khả vi trên [0,1]

$g'(x) = -\sin x$

Trên [0,1], $|g'(x)| < \sin 1 = q < 1$.

Nên g(x) là hàm co với hệ số co là $q = \sin 1$.

Định lý (nguyên lý ánh xạ co) :

Giả sử g(x) là hàm co trên [a,b] với **hệ số co q,** đồng thời g(x) ∈ [a,b], ∀x∈ [a,b]

Khi ấy với mọi giá trị x_o ban đầu ∈ [a,b] tùy ý, dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ về nghiệm x của pt

Ta có công thức đánh giá sai số

(1) $$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$ tiền nghiệm

(2) $$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$ hậu nghiệm

Nhận xét :Công thức (2) sai số chính xác hơn công thức (1)

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [3,4]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 3.5$

Tính gần đúng nghiệm x_4.

Giải

Ta chuyển pt về dạng $x = g(x)$

Có nhiều cách chuyển :

Cách 1: $$x = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{2x}{3} + \frac{5}{x^2}$$ Không phải hàm co

Cách 2: $x = 3 + \dfrac{5}{x^2} = g(x)$

$$g'(x) = -\frac{10}{x^3} \Rightarrow |g'(x)| \le \frac{10}{27} = q, \forall x \in [3,4]$$

q < 1 nên g hàm co

Hiển nhiên g(x) $\in$ [3,4] nên pp lặp hội tụ

xây dựng dãy lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3.5 \\ x_n = 3 + \dfrac{5}{x^2_{n-1}}, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ta lập bảng

n	x_n
0	3.5
1	3.408163265
2	3.430456452
3	3.424879897
4	3.426264644

Sai số

$$\Delta_4 = \frac{q}{1-q} | x_4 - x_3 | \approx 0.00082$$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = x^3+x-1000=0$$

với sai số 10^{-8}, cho khoảng phân ly nghiệm [9,10].

Giải:

Ta chuyển pt về dạng $x = g(x)$

Có nhiều cách chuyển :

Cách 1: $x = 1000 - x^3 = g(x)$ không phải hàm co

Cách 2:

$$x = \sqrt[3]{1000 - x} = g(x)$$

Hiển nhiên g(x) khả vi trên [9,10]

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} = q, \forall x \in [9,10]$$

$q \approx 0.0034 < 1$, nên g(x) là hàm co

Dễ dàng kiểm tra $g(x) \in [9,10], \forall x \in [9,10]$

$$(9 \le \sqrt[3]{1000-x} \le 10 \Leftrightarrow 0 \le x \le 271)$$

Theo nguyên lý ánh xạ co thì pp lặp hội tu

Chọn $x_o = 10$, xây dựng dãy lặp theo công thức

$$x_n = \sqrt[3]{1000 - x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, 3, ..$$

Sai số (dùng công thức (2) hậu nghiệm)

$$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Ta lập bảng

n	x_n	Δ_n
0	10	
1	9.966554934	0.12×10^{-3}
2	9.966667166	0.38×10^{-6}
3	9.966666789	0.13×10^{-8}

Nghiệm gần đúng x* = 9.966666789

IV. Phương Pháp Lặp Newton

Một phương pháp lặp khác là pp lặp Newton, nếu hội tụ sẽ cho tốc độ hội tụ nhanh hơn

Giả sử hàm f khả vi trên khoảng cách ly nghiệm $[a,b]$ với $f(a)f(b) < 0$ và $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$

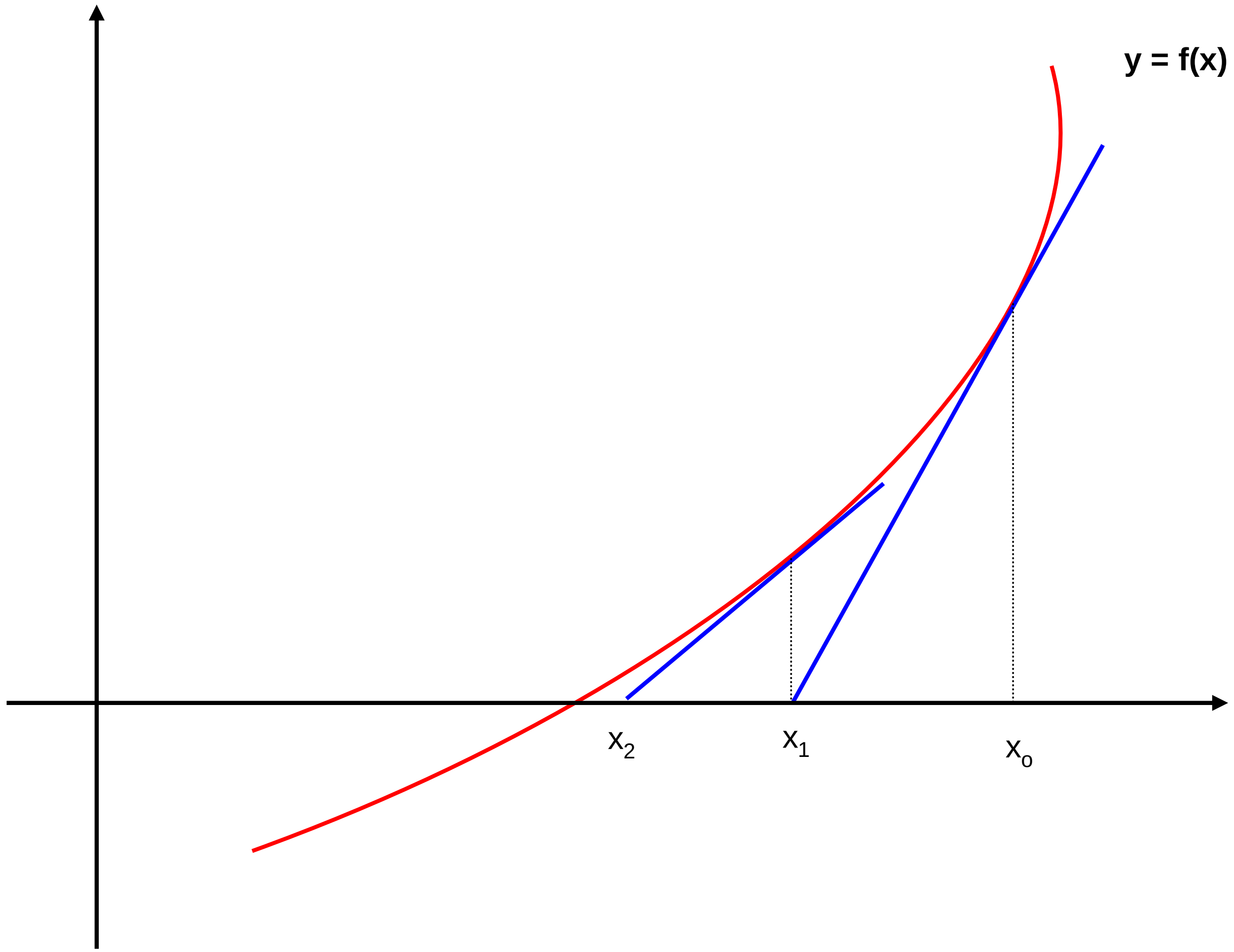
Để tìm nghiệm gần đúng ta chọn 1 giá trị ban đầu $x_o \in [a,b]$ tùy ý. Xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ theo công thức

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \forall n = 1, 2, \ldots}$$

Công thức này gọi là công thức lặp Newton

Tổng quát, dãy $\{x_n\}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Ý nghĩa hình học



Định lý :

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục và các đạo hàm f'(x) và f"(x) không đổi dấu trên đoạn [a,b].

Khi ấy nếu chọn giá trị ban đầu x_o thỏa điều kiện Fourier :

$$\boxed{f(x_o)f''(x_o) > 0}$$

Thì **dãy lặp $\{x_n\}$ xác định theo công thức Newton sẽ hội tụ về nghiệm x của pt.**

Chú ý :

- Điều kiện Fourier chỉ là ***điều kiện đủ, không phải là điều kiện cần***

- Từ điều kiện Fourier ta đưa ra qui tắc chọn giá trị ban đầu x_o như sau :

nếu **đạo hàm cấp 1 và 2 cùng dấu**, chọn $\mathbf{x_o = b}$. **Ngược lại** trái dấu chọn $\mathbf{x_o = a}$.

- Điều kiện Fourier $f(x_o)f''(x_o)$ có thể $= 0$ tại các điểm biên

Chú ý :

- Trong pp Newton, đạo hàm f'(x) phải $\neq 0$. Nếu $\exists\ c \in [a,b]$: $f'(c) = 0$ thì ta phải thu hẹp khoảng cách ly nghiệm để loại bỏ điểm c.

- Để đánh giá sai số của pp Newton ta dùng công thức sai số tổng quát :

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt bằng phương pháp Newton : $f(x) = x\text{-}\cos x = 0$

Trên khoảng cách ly nghiệm [0,1] với sai số 10^{-8}

Giải

1.Kiểm tra điều kiện hội tu

$f(x) = x - \cos x$ có đạo hàm cấp 1 và 2 liên tục trên [0,1]

$f'(x) = 1+\sin x > 0, \forall x \in [0,1]$

$f''(x) = \cos x > 0$

$f'(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu, chọn $x_o = 1$ ta có pp lặp Newton hội tụ

2. Xây dựng dãy lặp Newton

$$x_0 = 1$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - \cos x_{n-1}}{1 + \sin x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Công thức sai số

$$m = \min_{0 \le X \le 1} | f'(x) | = 1$$

$$| x_n - x | \le | f(x_n) | / m = | x_n - \cos x_n |$$

n	x_n	Δ_n
0	1	
1	0.750363867	0.02
2	0.739112890	0.41×10^{-4}
3	0.739085133	0.29×10^{-9}

Nghiệm gần đúng x = 0.739085133

Ví dụ : Cho phương trình

$$f(x) = x^3-3x+1= 0$$

Trên khoảng cách ly nghiệm [0,1]. Dùng pp Newton tính nghiệm x_3 và đánh giá sai số Δ_3 theo công thức sai số tổng quát.

Giải

1.Kiểm tra điều kiện hội tu

Ta thấy $f'(x) = 3x^2-3= 0$ tại $x = 1$, do đó ta chia đôi để thu hẹp khoảng cách ly nghiệm.

Vì $f(0) = 1$, $f(0.5) = -0.375$

Thu hẹp khoảng cách ly nghiệm [0, 0.5]

f(x) có đạo hàm cấp 1 và 2 liên tục trên [0, 0.5]

$f'(x) = 3x^2-3 < 0$

$f''(x) = 6x \geq 0, \forall x \in [0, 0.5]$

f'(x) và f''(x) trái dấu, nên chọn $x_o = 0$ thì pp lặp Newton hội tụ

2. Xây dựng dãy lặp Newton

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Công thức sai số

$$m = \min_{0 \le X \le 0.5} | f'(x) | = 2.25$$

$$| x_n - x | \le | f(x_n) | / m = | x_n^3 - 3x_n + 1 | / 2.25$$

n	x_n	Δ_n
0	0	
1	0.333333333	0.0165
2	0.347222222	0.8693×10^{-4}
3	0.347296353	0.2545×10^{-8}

Nghiệm gần đúng x = 0.347296353

Sai số 0.2545×10^{-8}

KẾT THÚC CHƯƠNG 2

…..